



**Dra. Briceyda Berenice Delgado López**

Doctora en Ciencias en  
especialización de  
Matemáticas

**Investigadora** o  
**Investigador Nacional,**  
Nivel 1 (SNII-1)

Datos de contacto:

[briceyda.delgado@infotec.mx](mailto:briceyda.delgado@infotec.mx)



## Procesamiento de imágenes usando análisis hipercomplejo

### Datos Generales

#### Resumen ejecutivo

Los cuaterniones son útiles para representar y manipular objetos tridimensionales en aplicaciones de visión por computadora, como la detección de objetos en entornos tridimensionales, seguimiento de movimiento, y reconstrucción tridimensional. Se emplean en la representación y alineación de imágenes médicas tridimensionales, como tomografías computarizadas (TC) o resonancias magnéticas (RM), para análisis y diagnósticos más precisos. Una generalización del álgebra de cuaternios son las llamadas álgebras de Clifford, estas permiten representar y manipular objetos geométricos en un espacio multidimensional de manera eficiente. En años recientes, la teoría de análisis hipercomplejo se ha desarrollado ampliamente y se han propuesto diversos algoritmos, por ejemplo, la transformada de Fourier cuaterniónica [10], la transformada de ondícula cuaterniónica [1], el filtro de Kalman cuaterniónico [2] y las redes neuronales cuaterniónicas [12, 9]. En este trabajo de investigación se analizará en particular a la transformada de Fourier cuaterniónica y su alcance.

#### Línea General y Aplicación del Conocimiento (LGAC)

9. Combinatoria, modelado y análisis de algoritmos

#### Palabras clave

Imagen a color, transformada de Fourier, números hipercomplejos, cuaterniones

#### Objetivo General

El objetivo principal del proyecto de investigación consiste en el análisis e implementación de técnicas del análisis hipercomplejo en el procesamiento de imágenes a color. Nos enfocaremos en analizar el alcance que tiene este enfoque en la clasificación y detección de patrones.

#### Objetivos específicos

Para lograr el objetivo general será necesario abordar los siguientes puntos: • Análisis de las transformadas de Fourier definidas desde el contexto de las álgebras de Clifford, así como el análisis de las distintas variantes de esta y de algunos kernels más eficientes. • Explorar como el análisis hipercomplejo puede integrarse con otras tecnologías emergentes, como la inteligencia artificial o la realidad aumentada, entre otras. • Determinar técnicas de validación que ayuden a realizar una comparativa objetiva de los métodos propuestos.

### Datos del proyecto

#### Descripción

En este proyecto de investigación se pretende realizar un análisis de las técnicas del análisis hipercomplejo en el procesamiento de imágenes a color. Nos enfocaremos en analizar el alcance que tiene este enfoque en la clasificación y detección de patrones. Existen diversas problemáticas sociales en las cuales el procesamiento de imágenes usando análisis cuaterniónico podría ser de utilidad, solo por mencionar algunos ejemplos detallaremos las ventajas en las estrategias de mercado y en las imágenes médicas. En el caso de las estrategias de mercado, al contar con una publicidad digital dirigida, dicho análisis permitiría contar con una representación más completa de los elementos visuales, lo que podría mejorar la segmentación y personalización de anuncios publicitarios, optimizando las estrategias de mercado para llegar de manera más efectiva a audiencias específicas y maximizar el impacto de las campañas publicitarias. En el ámbito de la medicina, el procesamiento de imágenes utilizando análisis cuaterniónico podría ser relevante en la detección y caracterización de muchas enfermedades crónicas degenerativas. Por ejemplo, los tumores cerebrales a través de imágenes de resonancia magnética (RM). La representación cuaterniónica permitiría capturar con mayor precisión la información espacial y estructural de los tejidos cerebrales, lo que facilitaría la identificación de anomalías y la diferenciación entre tejido sano y tumoral, contribuyendo así a mejorar el diagnóstico y tratamiento de enfermedades neurológicas.



### Antecedentes del problema a resolver

Las transformadas de Fourier son una herramienta fundamental en el procesamiento de imágenes y de señales. La transformada de Fourier hipercompleja es una generalización de la transformada de Fourier convencional que permite analizar señales y sistemas en espacios de dimensiones superiores. La primera definición de una transformada de Fourier cuaterniónica fue dada por Ell [7] en 1992, mientras que la primera aplicación de esta a las imágenes a color la realizó Sangwine [10] en 1996 usando una discretización de la transformada de Fourier definida por Ell. Años más tarde, Sangwine en conjunto con Ell propusieron una transformada de Fourier discreta para imágenes a color [11]. En el año 2007, en el artículo [8] se usó el álgebra de los cuaterniones para definir una transformada de Fourier que se pudiera aplicar al procesamiento de imágenes a color. Además, se presentó una transformada rápida de Fourier cuaterniónica usando una descomposición simpléctica. El espectro resultante se explica en términos de los conocidos conceptos de fase y módulo, y un nuevo concepto de eje hipercomplejo. También se presenta un método para visualización del espectro usando gráficas a color. Otras aplicaciones dadas a la transformada de Fourier hipercompleja fueron hechas por Bülow y Sommer [3, 4, 5] a las imágenes en escalas de grises. A continuación, se enumeran algunas de sus aplicaciones que se han desarrollado en las últimas dos décadas: 1. Procesamiento de imágenes y visión por computadora: La transformada de Fourier hipercompleja puede utilizarse para analizar imágenes en múltiples dimensiones, lo que resulta útil en aplicaciones como el procesamiento de imágenes médicas, la restauración de imágenes y la detección de patrones en imágenes. 2. Procesamiento de señales multidimensionales: Permite analizar señales en espacios multidimensionales, lo que es útil en campos como la telecomunicación, la geofísica y el procesamiento de señales biomédicas. Por ejemplo, en el análisis de series temporales tridimensionales en el estudio del clima o la oceanografía. Procesamiento de datos en redes neuronales y deep learning: En aplicaciones de aprendizaje profundo y procesamiento de datos complejos, la transformada de Fourier hipercompleja puede utilizarse para representar datos en espacios de características más ricos, lo que puede mejorar el rendimiento de los modelos y la capacidad de generalización.

### Justificación y pertinencia

La implementación de la transformada de Fourier hipercompleja tiene varias ventajas, entre las principales se encuentra que permite analizar imágenes a color en múltiples dimensiones, lo que proporciona una representación más completa de la información espacial y espectral de la imagen. Al igual que en el caso de imágenes en escala de grises, la transformada de Fourier hipercompleja puede descomponer una imagen a color en sus componentes de frecuencia, lo que facilita el análisis de patrones y características en diferentes rangos de frecuencia. Además, permite realizar operaciones de procesamiento de imágenes en el dominio de la frecuencia de manera conjunta en los canales de color (rojo, verde, azul), lo que puede simplificar ciertos tipos de manipulaciones y mejoras de imagen. Respecto a las aplicaciones podemos mencionar la relacionada a visión por computadora que involucran imágenes a color, como la detección de objetos, el reconocimiento facial y la segmentación de imágenes, el análisis en el dominio de la frecuencia con transformadas de Fourier hipercomplejas puede proporcionar características útiles para la clasificación y la extracción de información.

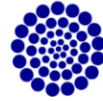
### Metas

1. Realizar un análisis detallado del estado del arte en el procesamiento de imágenes usando análisis hipercomplejo. En particular, análisis cuaterniónico. 2. Aplicación de los algoritmos propuestos en el procesamiento de imágenes usando análisis hipercomplejo y evaluar sus ventajas y/o desventajas con respecto a los métodos clásicos. 3. Participar en la dirección o codirección de tesis de alumnos de posgrado en el área de análisis hipercomplejo y/o procesamiento de imágenes. Explorar el alcance del procesamiento de datos en redes neuronales, más precisamente en una red neuronal hipercompleja o cuaterniónica [12, 9].

### Metodologías

En este proyecto se analizará las señales monogénicas para imágenes a color, para esto se utilizará las herramientas proporcionadas por las álgebras de Clifford. A continuación, se explicarán las bases de la metodología que se pretende usar. Siguiendo [10], usaremos la siguiente representación de las imágenes a color. Los píxeles de las imágenes a color tienen tres componentes y pueden ser representados usando cuaterniones puramente vectoriales. Por ejemplo, un píxel en las coordenadas de la imagen en una RGB imagen puede ser representado como  $(r, g, b)$ , donde  $r$  y  $g$  y  $b$  son las componentes rojas, verdes y azules, respectivamente. Luego, usando la descomposición de Cayley-Dickson es posible ver a los cuaterniones como un número complejo generalizado cuyas partes real e imaginaria son a la vez números complejos. Otra descomposición es la simpléctica, sean  $i$  y  $j$  dos cuaterniones unitarios perpendiculares, entonces es posible escribir a cualquier cuaternión en la forma  $a + bi + cj + dk$  donde  $a$  se le conoce como la parte simple y  $(b, c, d)$  como la parte perpleja (traducido del inglés perplex). La relación entre las 4-tuplas  $(a, b, c, d)$  y  $(r, g, b)$  es equivalente al cambio de bases de  $(1, i, j, k)$  a  $(1, i, j, k)$ , donde  $(1, i, j, k)$ . Así, es posible reescribir a la imagen usando la descomposición simpléctica pixel por pixel como sigue  $(r, g, b) = (a, b, c, d)$ , donde  $(a, b, c, d)$  representa la parte simple y la parte perpleja. La siguiente imagen muestra la descomposición simpléctica descrita anteriormente. El eje  $x$  está a lo largo de la línea de grises, por lo tanto, la parte simple es la información de luminancia (sigue siendo una imagen a todo color, no una imagen en escala de grises) y la parte perpleja corresponde a la información de crominancia (de nuevo, una imagen a todo color). Estas dos partes pueden sumarse mediante la ecuación anterior para obtener la imagen original. Figura 1: Imagen tomada de <https://arindamdhara.com/chrominance-and-luminance/>. Por otro lado, se analizará el uso de álgebras de dimensión mayor, por ejemplo, en [6] se consideraron señales que representan una imagen a color vista como una función que toma valores en la parte vectorial del álgebra de Clifford para esto es necesario el análisis de un problema de valor en la frontera para el Laplaciano 5-dimensional. La solución de este problema contiene información de la estructura y del color. Por mencionar dos aplicaciones de las señales monogénicas a color podemos mencionar la segmentación geométrica multiescala con respecto a un color dado y la extracción del flujo óptico de objetos en movimiento de un color determinado.





**Resultados esperados**

Presentación de ponencias o carteles relacionados al proyecto de investigación en congresos nacionales e internacionales, como por ejemplo en la Reunión Conjunta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Publicación de los resultados obtenidos en revistas indexadas con alto factor de impacto. Crear una red de colaboración con expertos en el área de análisis hipercomplejo y/o procesamiento de imágenes e involucrar a estudiantes en los proyectos colaborativos. Además, se espera obtener algún o algunos proyectos de titulación de la Maestría en Ciencia de Datos e Información.

**Cronograma de trabajo**

#	Entregable(s) comprometido(s)	Fecha inicio	Fecha fin
1	Artículo de investigación en revista especializada	16/01/2024	31/12/2024
2	Impartición de docencia.	01/07/2024	31/12/2024
3	Participación en comité tutorial, dirección o codirección de trabajo de titulación.	16/01/2024	31/12/2024
4	Difusión	16/01/2024	31/12/2024

**Bibliografía relevante**

[1] Bayro-Corrochano, E.: "The theory and use of the quaternion wavelet transform". Journal of Mathematical Imaging and Vision 24(1), 19--35 (2006) [2] Bayro-Corrochano, E., Zhang, Y.: "The motor extended Kalman filter: A geometric approach for rigid motion estimation". Journal of Mathematical Imaging and Vision 13(3), 205--228 (2000). [3] Bülow, T., "Hypercomplex Spectral Signal Representations for the Processing and Analysis of Images," Ph.D. dissertation, Christian-Albrechts Univ., Kiel, Germany, (1999). [4] Bülow, T., Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images, Inst. Comput. Sci. Appl. Math., Christian-Albrechts-Univ. Kiel, Kiel, Germany, Tech. Rep. (1999). [5] Bülow, T., Sommer, G., "Hypercomplex signals: a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case," IEEE Trans. Signal Process., vol. 49, no. 11, pp. 2844--2852, (2001). [6] Demarcq, G., Mascarilla, L., Berthier, M., and Courtellemont, P. The Color Monogenic Signal: Application to Color Edge Detection and Color Optical Flow. J Math Imaging Vis 269--284, (2011). [7] Ell, T.A., Hypercomplex Spectral Transforms, Ph.D. dissertation, Univ. Minnesota, Minneapolis, (1992). [8] Ell, T.A., Sangwine, S., Hypercomplex Fourier transforms of Color Images. IEEE Trans. Image Process. 16(1), 5--18 (2007). [9] Parcollet, T., Zhang, Y., Morchid, M., Trabelsi, C., Linares, G., De Mori, R., Bengio, Y.: Quaternion convolutional neural networks for end-to-end automatic speech recognition, in Proceedings of the Annual Conference of the International Speech Communication Association (INTERSPEECH), 22--26 (2018). [10] Sangwine, S., "Fourier transforms of colour images using quaternion, or hypercomplex, numbers," Electron. Lett., vol. 32, no. 21, pp. 1979--1980, Oct. (1996). [11] Sangwine, S., Ell, T.A., The discrete Fourier Transform of a color image, in Proc. Image Processing II Mathematical Methods, Algorithms and Applications, J. M. Blackledge and M. J. Turner, Eds., Chichester, U.K., 430--441, (2000). [12] Zhu, X., Xu, H., Chen, Ch., Quaternion Convolutional Neural Networks. In: Ferrari, V., Hebert, M., Sminchisescu, C., Weiss, Y. (eds) Computer Vision - ECCV 2018. ECCV 2018. Lecture Notes in Computer Science(), vol 11212. Springer, Cham.

