Sobre las extensiones finitas de gráficas*

N. García-Colín † M.A. Pizaña‡ R. Villarroel-Flores§

Resumen

Una gráfica G es *extensión* de otra gráfica L, si para todo vértice $v \in G$, la subgráfica inducida por los vecinos de v es isomorfa a L. El *problema de la extensión finita* (PEF) consiste decidir si existe alguna extensión finita G para una gráfica dada L. Es un problema abierto el determinar si el PEF es algorítmicamente soluble o no, pero todas las variantes interesantes del PEF que se han considerado han resultado ser algorítmicamente irresolubles. Reportamos en este documento parte del trabajo que hemos venido haciendo en torno del PEF. En particular, presentamos condiciones suficientes para que una gráfica dada no tenga extensión finita.

Palabras Clave. Extensión de gráficas. Gráficas localmente homogéneas. Algoritmos. Irresolubilidad.

1 Introducción

Una gráfica G (no necesariamente finita) es *extensión* de otra gráfica L (finita), si para todo vértice $v \in G$, la subgráfica inducida por los vecinos de v es isomorfa a L ($N_G(v) \cong L$); en este caso también decimos que G es *localmente* L. Más en general considere un conjunto de gráficas (finitas) $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_r\}$, decimos entonces que una gráfica G (no necesariamente finita) es *localmente* $\mathcal{L}$ si para todo $v \in G$ los vecinos de v inducen una subgráfica isomorfa a alguna de las gráficas en $\mathcal{L}$, en este caso también diremos que G es una extensión de $\mathcal{L}$. Se ha mostrado, que los siguientes problemas son (algorítmicamente) irresolubles:

Teorema 1 *[8, 9] Son irresolubles los siguientes problemas:*

1. *Dada L, decidir si L tiene extensión* **finita o infinita**.
2. *Dada L, decidir si L tiene extensión* **infinita**.
3. *Dada $\mathcal{L} = \{L_1, L_2\}$, decidir si $\mathcal{L}$ tiene extensión* **finita**.

El *problema de la extensión finita* (PEF) consiste decidir si existe alguna extensión **finita** G para una gráfica dada L. Como puede verse, el PEF es un problema muy cercano a los problemas en la lista anterior. Sin embargo, es un problema abierto el determinar si el PEF es algorítmicamente irresoluble o no.

Recuerde que un *algoritmo* es un procedimiento que ante cualquiera de sus posibles entradas, responde correctamente y *termina en un tiempo finito*; por contraste, un *procedimiento* que calcula algo, puede en principio quedarse calculando por siempre ante algunas de sus entradas posibles, de modo que el usuario no puede saber cuál es la respuesta ante esas entradas. Entonces lo que no se sabe sobre el PEF es si existe un algoritmo que lo resuelve o no.

Existen, eso sí, procedimientos conocidos que construyen una extensión finita de una gráfica dada L en caso de existir, pero estos procedimientos pueden quedarse calculando por siempre en caso de que L no tenga extensión. Como estos procedimientos no siempre terminan, no son algoritmos y queda entonces de manifiesto que uno de los problemas centrales en esta línea de investigación consiste en

*Trabajo realizado con apoyo de SEP-CONACyT, proyecto 183210.

†INFOTEC Centro de investigación e innovación en tecnologías de la información y comunicación pmnatz@gmail.com

‡Universidad Autónoma Metropolitana, map@xanum.uam.mx

§Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, rafaelv@uaeh.edu.mx

encontrar criterios que permitan decidir que la gráfica L no tiene extensión. Para lograr un algoritmo para el PEF, bastaría entonces tener un procedimiento que en algún momento responda ”no” en caso de que L no tenga extensión finita (aunque pueda seguir calculando por siempre en caso contrario): El algoritmo se podría entonces construir corriendo ambos procedimientos concurrentemente: si L tiene extensión finita, en algún momento tendríamos la construcción de G gracias al primer procedimiento, y si L no tiene extensión, el segundo procedimiento respondería ”no” en algún tiempo finito. Con ello tendríamos un programa que responde correctamente y siempre termina en tiempo finito: un algoritmo.

Reportamos en este documento parte del trabajo que hemos venido haciendo en torno del problema de la extensión finita. En particular, presentamos condiciones suficientes para que una gráfica dada no tenga extensión finita (Teorema 2) y mostramos que debería existir un algoritmo para el PEF si cierta condición se cumple (Teorema 3).

2 El teorema

Para cada entero $r \geq 0$, decimos que una gráfica H es una *r-extensión parcial* de L si existe $x_0 \in H$ tal que para todo vértice $x \in H$ tenemos $d(x_0, x) \leq r \implies N_H(x) \cong L$. Supondremos que cada H de estas ya viene con su vértice x_0 especificado. Note que una extensión (finita o infinita) de L es siempre una r-extensión parcial de L.

Sea L una gráfica finita. Sea s el número de órbitas de los vértices de L bajo su propio grupo de automorfismos y sean $n_1, n_2, \dots n_s$ el número de vértices de L en cada órbita. Etiquetemos los vértices de L del 1 al s de acuerdo a la órbita a la que pertenece cada vértice. Esto nos permite a su vez etiquetar (algunas) aristas de una r-extensión parcial H de L: Si $xy \in E(H)$ y $d(x_0, x), d(x_0, y) \leq r$, entonces $N_H(x) \cong L \cong N_H(y)$. Usando los isomorfismos implícitos, podemos copiar las etiquetas de L a los vértices de $N_H(x)$ y $N_H(y)$ y entonces, si $y \in N_H(x)$ está etiquetado como a y $x \in N_H(y)$ está etiquetado como b podemos asignar la etiqueta $\{a, b\}$ a la arista xy de H. Si una r-extensión parcial H de L tiene un vértice x tal que x_0x es arista y está etiquetada $\{a, b\}$ decimos que H *realiza* a $\{a, b\}$.

Definimos el *conjunto de pares* $X_0 = \{\{a, b\} \mid 1 \leq a, b \leq s\}$. Observe que algunos de estos pares son de hecho singuletes $\{a, a\} = \{a\}$. Definimos ahora los siguientes subconjuntos de X_0:

$$\begin{aligned}
X_r &= \{\{a,b\} \in X_0 \mid \text{ existe una } r\text{-extensión parcial de } L \text{ que realiza a } \{a,b\}\} \\
X_\infty &= \{\{a,b\} \in X_0 \mid \text{ existe una extensión de } L \text{ que realiza a } \{a,b\}\} \\
X_F &= \{\{a,b\} \in X_0 \mid \text{ existe una extensión finita de } L \text{ que realiza a } \{a,b\}\}
\end{aligned}$$

Evidentemente $X_F \subseteq X_\infty \subseteq \cdots \subseteq X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_0$. También es cierto que $X_\infty = \bigcap_{r=1}^{\infty} X_r$, aunque esto es menos evidente. Diremos que X es un *conjunto admisible de pares* si $X_F \subseteq X \subseteq X_0$. Tomemos un conjunto admisible de pares $X = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ y para cada i, j con $1 \leq i \leq s$ y $1 \leq j \leq t$ definamos

$$m_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } p_j = \{i\} \\ 1 & \text{si } i \in p_j, |p_j| = 2 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ahora definimos $\mathcal{D}_X(L)$ como *programa lineal entero* (ILP):

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix}, \qquad x_1, x_2, \dots, x_t \geq 0, \qquad n \geq 1.$$

Como es usual en programación lineal entera, sólo nos interesarán las soluciones de $\mathcal{D}_X(L)$ que sean enteras, así que simplemente diremos que $\mathcal{D}_X(L)$ *tiene solución* si y sólo si tiene alguna solución entera. Ahora podemos enunciar nuestro teorema principal:

Teorema 2 *Sea L una gráfica finita y X un conjunto admisible de pares, entonces, si $\mathcal{D}_X(L)$ no tiene solución, L no tiene extensión finita. Además $\mathcal{D}_{X_F}(L)$ tiene solución si y sólo si L tiene extensión finita.*

La segunda parte del teorema anterior suena estupenda, pero el problema es que no se sabe si X_F es algorítmicamente computable. Dado que $X_F \subseteq X_\infty$, es fácil ver que si $\mathcal{D}_{X_F}(L)$ tiene solución, $\mathcal{D}_{X_\infty}(L)$ también la tiene. No sabemos si el recíproco también es verdadero, pero si lo fuera, tendríamos un algoritmo para el PEF:

Teorema 3 *Si para toda gráfica finita L se cumple que $\mathcal{D}_{X_F}(L)$ tiene solución siempre que $\mathcal{D}_{X_\infty}(L)$ la tenga, entonces existe un algoritmo para el PEF.*

Este teorema vale pese a que se sabe (por el Teorema 1, inciso 1) que X_∞ no es algorítmicamente computable.

Referencias

[1] S. Al-Addasi. *Some properties of locally homogeneous graphs.* An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat. **18** (2010) 15–21.

[2] A. Blass, F. Harary and Z. Miller. *Which trees are link graphs?* J. Combin. Theory Ser. B **29** (1980) 277–292.

[3] A. Blokhuis, A.E. Brouwer, D. Buset and A.M. Cohen. The locally icosahedral graphs. In *Finite geometries (Winnipeg, Man., 1984)*, volume 103 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 19–22. Dekker, New York, 1985.

[4] A.E. Brouwer, J.H. Koolen and M.H. Klin. *A root graph that is locally the line graph of the Petersen graph.* Discrete Math. **264** (2003) 13–24. The 2000 Com^2MaC Conference on Association Schemes, Codes and Designs (Pohang).

[5] M. Brown and R. Connelly. On graphs with a constant link. In *New directions in the theory of graphs (Proc. Third Ann Arbor Conf., Univ. Michigan, Ann Arbor, Mich., 1971)*, pages 19–51. Academic Press, New York, 1973.

[6] M. Brown and R. Connelly. *On graphs with a constant link. II.* Discrete Math. **11** (1975) 199–232.

[7] P. Bugata, A. Nagy and R. Vávra. *A polynomial time algorithm recognizing link trees.* J. Graph Theory **19** (1995) 417–433.

[8] V.K. Bulitko. On the problem of the finiteness of a graph with given vertex neighborhoods. In *General systems theory (Russian)*, pages 76–83. Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Kibernet., Kiev, 1972.

[9] V.K. Bulitko. *Graphs with prescribed environments of the vertices.* Trudy Mat. Inst. Steklov. **133** (1973) 78–94, 274. Mathematical logic, theory of algorithms and theory of sets (dedicated to P. S. Novikov on the occasion of his seventieth birthday).

[10] D. Buset. *Graphs which are locally a cube.* Discrete Math. **46** (1983) 221–226.

[11] D. Buset. Locally polyhedral graphs. In *Finite geometries (Winnipeg, Man., 1984)*, volume 103 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 23–25. Dekker, New York, 1985.

[12] D. Buset. *Locally C_n^k graphs.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **2** (1995) 481–485.

[13] B.L. Chilton, R. Gould and A.D. Polimeni. *A note on graphs whose neighborhoods are n-cycles.* Geometriae Dedicata **3** (1974) 289–294.

[14] J.I. Hall. *Locally Petersen graphs.* J. Graph Theory **4** (1980) 173–187.

[15] J.I. Hall. *Graphs with constant link and small degree or order.* J. Graph Theory **9** (1985) 419–444.

[16] J.I. Hall and E.E. Shult. *Locally cotriangular graphs.* Geom. Dedicata **18** (1985) 113–159.

[17] P. Hell. Graphs with given neighborhoods. I. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, pages 219–223. CNRS, Paris, 1978.

[18] R. Nedela. *Locally homogeneous graphs with dense links at vertices.* Czechoslovak Math. J. **42(117)** (1992) 515–517.

[19] R. Nedela. *Covering spaces of locally homogeneous graphs.* Discrete Math. **121** (1993) 177–188. Graph theory (Niedzica Castle, 1990).

[20] R. Nedela. *Edge-locally homogeneous graphs.* Acta Univ. Mathaei Belii Nat. Sci. Ser. Ser. Math. 1 (1993) 27–32.

[21] R. Nedela. *Covering projections of graphs preserving links of vertices and edges.* Discrete Math. **134** (1994) 111–124. Algebraic and topological methods in graph theory (Lake Bled, 1991).

[22] R. Nedela. *Graphs which are edge-locally C_n.* Math. Slovaca **47** (1997) 381–391.

[23] M.A. Ronan. *On the second homotopy group of certain simplicial complexes and some combinatorial applications.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **32** (1981) 225–233.

[24] J. Tomanová. *Amalgamations and link graphs of Cayley graphs.* Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **60** (1991) 257–267.

[25] J. Tomanová. *A note on link graphs.* Math. Slovaca **39** (1989) 225–231.

[26] P. Vanden Cruyce. *A finite graph which is locally a dodecahedron.* Discrete Math. **54** (1985) 343–346.

[27] A. Vince. *Locally homogeneous graphs from groups.* J. Graph Theory **5** (1981) 417–422.

[28] W. Vogler. *Representing groups by graphs with constant link and hypergraphs.* J. Graph Theory **10** (1986) 461–475.

[29] G.M. Weetman. *A construction of locally homogeneous graphs.* J. London Math. Soc. (2) **50** (1994) 68–86.

[30] G.M. Weetman. *Diameter bounds for graph extensions.* J. London Math. Soc. (2) **50** (1994) 209–221.

[31] B. Zelinka. *The least connected non-vertex-transitive graph with constant neighbourhoods.* Czechoslovak Math. J. **40(115)** (1990) 619–624.