Una caracterización combinatoria de triangulaciones del disco.

Edgar Morales Avalos* Natalia García–Colín†

Resumen

En este trabajo mostraremos que las triangulaciones finitas del disco se caracterizan por su matriz de intersección.

Palabras Clave. Triangulación. Superficie. Matriz de Intersección.

1 Introducción.

Uno de los resultados más interesantes y sorprendentes de la teoría de los politopos convexos dice que la matriz de adjacencias de dimensión $d-2$ de un d-politopo convexo y simplicial determina por completo su estructura combinatoria. Este fenómeno no es cierto en general [2, 3].

Inspirados por el resultado anterior, Arocha et.al. [1] demostraron que una triangulación finita de una superficie conexa y sin frontera está completamente determinada por su matriz de intersección.

El propósito de este trabajo es dar una caracterización combinatoria del disco finitamente triangulado a partir de su matriz de intersección y con este resultado, motivar al estudio de generalizaciones para algunas otras superficies.

2 Preliminares.

Definición 1 *Dada una una superficie C, triangulada por n triángulos etiquetados $\{t_1, \dots t_n\}$, su matriz de intersección, M_C, se define como la matriz que tiene en cada una de sus entradas $|t_i \cap t_j| = a_{i,j}$, con $1 \leq i, j \leq n$.*

2.1 Lema de las Semirruedas.

Definición 2 *Llamaremos n -* semirrueda *a la triangulación S_n que consta de n triángulos y de $n+2$ vértices $\{v_0, v_1, ..., v_{n+1}\}$ donde $n \geq 3$, y cada triángulo t_i tiene por vértices $\{v_0, v_i, v_{i+1}\}$ con $1 \leq i \leq n$.*

Lema 1 *Si T es una triangulación finita con matriz de intersección M_T tal que $M_T = M_{S_n}$ para alguna semirrueda S_n, entonces dependiendo de n, T es alguna de las siguientes triangulaciones:*

(a) Si $M_T = M_{S_3}$ entonces T es una $3-semirrueda$.

(b) Si $M_T = S_j$ con $4 \leq j \leq 6$, entonces T es una $j-semirrueda$ o una $j-arracada$. (Figura 1)

(c) Si $M_T = S_j$ con $j \geq 7$ entonces T es una $j-semirrueda$.

2.2 Lema de las Ruedas.

Definición 3 *Llamaremos n–*rueda *a la triangulación R_n que consta de n triángulos y de $n+1$ vértices: $\{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$, donde $n \geq 3$ y tal que cada triángulo t_i tiene por vértices $\{v_0, v_i, v_{i+1}\}$ si $1 \leq i \leq n-1$ y el triángulo t_n tiene por vértices $\{v_0, v_n, v_1\}$.*

*Facultad de Ciencias, UNAM, `eddy_edgar22@hotmail.com`

†INFOTEC, Centro de Investigación e Innovación en Tecnologias de la Información y Comunicación, `natalia.garcia@infotec.com.mx`

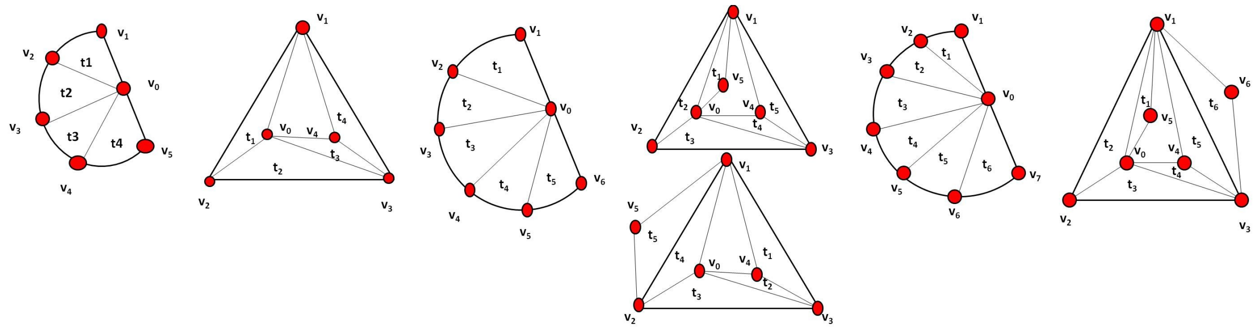

Figura 1: De izquierda a derecha S_4, S_5 y S_6 con sus respectivas arracadas.

Lema 2 *Si T es una triangulación finita con matriz de intersección M_T tal que $M_T = M_{R_n}$, entonces dependiendo de n, T es alguna de las siguientes triangulaciones:*

(a) Si $M_T = R_3$ entonces T es una $3-rueda$ o un 3–libro. (Figura 2)

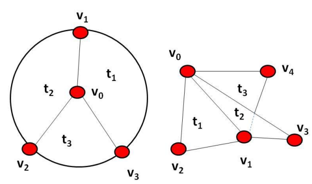

Figura 2: R_3 y el 3–libro.

(b) Si $M_T = R_4$ entonces T es una $4-rueda$.

(c) Si $M_T = R_j$ con $j = 5$ o $j = 6$ entonces T es una $j-rueda$ o una triangulación de una banda de Möbius de j triángulos. (Figura 3)

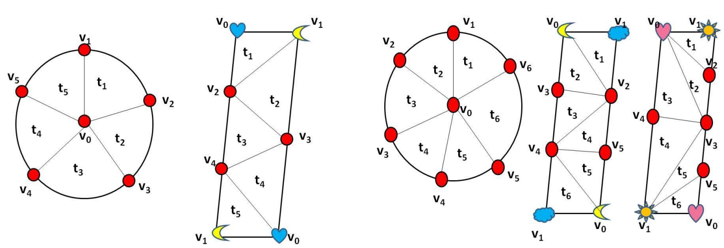

Figura 3: Izquierda S_5, derecha S_6 con sus respectivas Bandas de Möbius trianguladas.

(d) Si $M_T = R_j$ con $j \geq 7$, entonces T es una $j-rueda$.

Las pruebas de ambos lemas requieren de un análisis combinatorio exhaustivo para cada una de las semirruedas S_n y ruedas R_n, el cual consiste en *armar* a la triangulación tomando en cuenta la información de intersecciones que su matriz proporciona.

3 Caracterización de Discos.

Teorema 3 *Sean D y D' dos superficies trianguladas finitamente por n triángulos, ambas homeomorfas a un disco con matrices de intersección M_D y $M_{D'}$ respectivamente, tales que $M_D = M_{D'}$, entonces, D y D' son la misma triangulación.*

Demostración. Primero que nada, definiremos la vecindad de un vértice v en D, $N(v)$, como el conjunto de todos los triángulos que tienen como alguno de sus vértices a v. Notemos entonces que para cualquier vértice $v \in D$, $N(v)$ es una rueda si el v está en el interior del disco y una semirrueda si v está en la frontera.

Bajo la hipótesis $M_D = M_{D'}$ tenemos que existe una función que va de los triángulos de D a los triángulos de D', $\varphi : \Delta(D) \longrightarrow \Delta(D')$, tal que $|t_i \cap t_j| = |\varphi(t_i) \cap \varphi(t_j)|$ para toda $i, j \leq n$. A continuación analizaremos los posibles casos que puede presentar la función φ.

Caso 1.- Supongamos que para todo vértice en D, $\varphi(N(v))$ es una rueda si $N(v)$ es rueda y $\varphi(N(v))$ es una semirrueda si $N(v)$ es semirrueda. Nótese que $\cap N(v)$ es precisamente v, entonces podemos extender a la función φ a una función que va de los vértices de D a los vértices de D', $\psi : V(D) \longrightarrow V(D')$, con la regla de correspondencia $\psi(\cap N(v)) = \cap\varphi(N(v))$.

Caso 2.- Supongamos que existe $v \in D$ tal que $N(v)$ corresponde a una 3–rueda y tal que la función φ mapea a esta vecindad al 3–libro. Esto querría decir que el 3–libro está contenido en D', pero este caso no puede suceder, pues la dimensión mínima de encaje del 3–libro es 3, mientras que la dimensión mínima de encaje de D' es 2, es decir, D' no puede contener al 3–libro.

Caso 3.- Supongamos que existe $v \in D$ tal que $N(v)$ corresponde a una i–semirrueda y tal que la función φ mapea a esta vecindad a una i–arracada para $i = 4, 5$ *ó* 6. Usando argumentos combinatorios y topológicos podemos mostrar que este caso no puede ser posible. No explicítamos dichos casos en esta nota por brevedad.

Caso 4.- Supongamos que existe $v \in D$ tal que $N(v)$ corresponde a una j–rueda con $j = 5$ *ó* 6 y tal que la función φ mapea a esta vecindad a una banda de Möbius. Esto implicaría que la banda de Möbius está contenida en D'. Es decir este caso no puede suceder, pues la dimensión mínima de encaje de la banda de Möbius es 3, mientras que la dimensión de encaje de D' es 2, es decir, D' no puede contener a la banda de Möbius.

Entonces hemos argumentado que el Caso 1 es el único posible. Por tanto, mediante el uso de la función ψ podemos dar una biyección entre $V(D)$ y $V(D')$. Esta función tiene la particularidad de mapear triángulos en triángulos, mientras se preservan las intersecciones. Es decir las triangulaciones D y D' son combinatoriamente equivalentes.

$\square$

Referencias

[1] Arocha, J., Bracho, J., García-Colín, N., Hubard, I.: Reconstructing surface triangulations by their intersection matrices., enero, 2014.

[2] Branko, G.: Convex Polytopes. Pure and Applied Mathematics, Springer, 1967.

[3] Matousek, J.: Lectures on Discrete Geometry, Springer, 2002.