Explorando el concepto de perfección en 3-hipergráficas

Natalia García-Colín* Amanda Montejano† Deborah Oliveros ‡

Resumen

Una manera natural de extender el concepto de perfección de gráficas a hipergráficas es la siguiente: dada H una m-hipergráfica uniforme, decimos que H es *perfecta* si para toda m-subhipergráfica H' de H se satisface que $\chi(H') = \left\lceil \frac{\omega(H')}{m-1} \right\rceil$, donde $\chi(H')$ y $\omega(H')$ son el número cromático y el número de clan de H' respectivamente.

Una gráfica (2–hipergráfica uniforme) de *comparabilidad* es una gráfica que se pueden orientar transitivamente. Es bien sabido que la familia de gráficas de comparabilidad es una familia de gráficas perfectas. En este trabajo estudiamos la familia de las 3–hipergráficas de comparabilidad en relación con el concepto de perfección arriba descrito. En particular, presentamos tres subfamilias de 3-hipergráficas de comparabilidad, exhibiendo tres comportamientos distintos en la relación entre el número cromático y el número de clan de tales hipergráficas.

Palabras Clave. Transitividad en 3-hipergráficas. Perfección en 3–hipergráficas. Permutaciones Cíclicas.

1 Introducción

Estudiaremos hipergráficas uniformes, es decir, hipergráficas cuyas aristas tienen todas el mismo número de vértices. Así, una *m-hipergráfica uniforme H* (que llamaremos por simplicidad *m-gráfica*) es una pareja $H = (V(H), E(H))$ donde $V(H)$ es el conjunto de *vértices* y $E(H) \subseteq \binom{V(H)}{m}$ es el conjunto de *aristas*. Dada una m-gráfica H, el *número cromático* de H, denotado por $\chi(H)$, se define como el mínimo k tal que $V(H)$ se puede partir en k partes, llamadas *clases cromáticas*, de tal manera que ninguna arista esté contenida en una clase cromática. El *número de clan* de H, denotado por $\omega(H)$, es la cardinalidad máxima de un subconjunto de $V(H)$ que induce una m-gráfica completa.

Denotemos por K_n^m a la m-gráfica completa con n vértices. Dado que $\chi(K_n^m) = \left\lceil \frac{n}{m-1} \right\rceil$, entonces cualquier m-gráfica H satisface:

$$\left\lceil \frac{\omega(H)}{m-1} \right\rceil \leq \chi(H). \tag{1}$$

En particular, toda 2-gráfica (gráfica simple) G satisface $\omega(G) \leq \chi(G)$. En 1961, Claude Berge [1] introduce el concepto de perfección al definir una gráfica G como *perfecta*, si tanto ella como todas sus subgráficas inducidas, $G' \subseteq G$, satisfacen $\omega(G') = \chi(G')$ (para más información sobre gráficas perfectas, consultar [9]).

La noción de perfección para hipergráficas se ha estudiado en pocas ocasiones (ver [5, 6]) y ciertamente la definición para hipergráfica perfecta permanece, hasta donde sabemos, sin ser consensuada. Naturalmente, en el contexto de m-hipergráficas uniformes, resulta tentador definir una m-gráfica H como *perfecta*, si tanto ella como todas sus m-subgráficas inducidas, $H' \subseteq H$, satisfacen la igualdad en (1).

Con el objeto de explorar el concepto de perfección arriba descrito, en este trabajo nos centraremos en estudiar una familia particular de 3-gráficas, llamadas 3-gráficas de comparabilidad. Las *3-gráficas de comparabilidad*, en analogía con las gráficas de comprarabilidad, son aquellas que se pueden orientar transitivamente (ver definiciones precisas en la siguiente sección). En el contexto de gráficas simples,

*Instituto de Matemáticas, UNAM, natalia.garciacolin@im.unam.mx
†UMDI Facultad de Ciencias, UNAM, amandamontejano@ciencias.unam.mx
‡Instituto de Matemáticas, UNAM, dolivero@matem.unam.mx

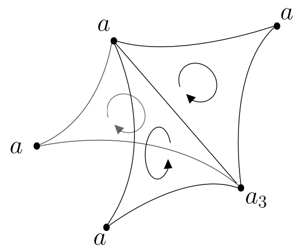

Figura 1: Una 3-gráfica orientada, no transitiva, cuya 3-gráfica subyacente es de comparabilidad pues se puede orientar transitivamente.

las gráficas de comparabilidad son una importante familia de gráficas perfectas [9]. En este artículo presentamos tres subfamilias de 3-gráficas de comparabilidad, exhibiendo tres comportamientos distintos con respecto a la desigualdad en (1).

En primer lugar veremos una subfamilia de 3-gráficas de comparabilidad para las cuales la diferencia $\chi(H) - \left\lceil \frac{\omega(H)}{2} \right\rceil$ es arbitrariamente grande. En segundo lugar, exhibiremos una interesante subclase de 3-gráficas de comparabilidad, llamadas 3-gráficas de permutación cíclica (análogas a las conocidas gráficas de permutación), para las cuales el número cromático está acotado por una función lineal del número de clan. Finalmente mostraremos otra subclase de 3-gráficas de comparabilidad (asociada a la familias de intervalos cerrados en una circunferencia) para las cuales la igualdad en (1) siempre se satisface, es decir, su número cromático es tan pequeño como puede ser en función de su número de clan.

2 Las 3-gráficas de comparabilidad

En [3] los autores introducen los conceptos de 3-gráfica orientada, 3-gráfica orientada transitiva, y definen la clase de 3-gráficas de comparabilidad. Estas 3-gráficas constituyen una interesante familia que, en principio, parece una buena candidata para ser un ejemplo de 3-gráficas perfectas.

Sea X un conjunto de orden n. Un *orden lineal* de X es una biyección $\phi : \{1, 2, ..., n\} \to X$. Un *orden cíclico* de X es una clase de equivalencia del conjunto de órdenes lineales con respecto a la *relación de equivalencia cíclica* definida por: $\phi \sim \psi$, si y sólo si existe $k \leq n$, tal que $\phi(i) = \psi(i + k)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ donde $i + k$ se toma módulo n. Denotaremos cada orden cíclico, $[\phi]$, con la notación de permutaciones cíclicas, $\big(\phi(1)\, \phi(2)\, \ldots\, \phi(n)\big)$. Por ejemplo, para una terna $\{u, v, w\}$ existen exactamente dos órdenes cíclicos: $(u\ v\ w)$ y $(u\ w\ v)$, donde $(u\ v\ w) = (v\ w\ u) = (w\ u\ v)$ y $(u\ w\ v) = (v\ u\ w) = (w\ v\ u)$.

Definición 1 *Una* 3-gráfica orientada *es una 3-gráfica H en la cual se le ha asignado a cada arista exactamente uno de los dos posibles órdenes cíclicos. Dada una orientación de H, al conjunto de órdenes cíclicos de las aristas de H, lo denotamos por $O(H)$.*

Por ejemplo, sea H con $V(H) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y $E(H) = \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_5\}\}$. Una posible orientación de H es $O(H) = \{(a_1\, a_2\, a_3), (a_1\, a_4\, a_3), (a_1\, a_3\, a_5)\}$. En la figura 1 se muestra una ilustración de dicha 3-gráfica orientada.

Definición 2 *Una 3-gráfica orientada H se dice* transitiva *si siempre que $(u\,v\,z)$ y $(z\,v\,w) \in O(H)$, entonces $(u\,v\,w) \in O(H)$ (lo cual implica también $(u\,w\,z) \in O(H)$).*

Definición 3 *Una 3-gráfica (no orientada) se dice* 3-gráfica de comparabilidad *si admite una orientación transitiva.*

La 3-gráfica orientada definida en el párrafo anterior (figura 1) no es transitiva. Sin embargo, la 3-gráfica subyacente de ésta, es una 3-gráfica de comparabilidad ya que se puede orientar transitivamente, por ejemplo con $O'(H) = \{(a_1\, a_3\, a_2), (a_1\, a_3\, a_4), (a_1\, a_3\, a_5)\}$. En contraste, una 3-gráfica con 4 vértices y 3 aristas, no es de comparabilidad.

Una 3-gráfica orientada cuya 3-gráfica subyacente es una 3-gráfica completa, se llama un 3*-torneo*. Así como en el caso de gráficas orientadas, en el caso de 3-gráficas orientadas existe (salvo isomorfismos) un único 3-torneo transitivo con n vértices, que denotaremos por TT_n^3.

A continuación definiremos dos subclases sobresalientes dentro de la clase de 3-gráficas de comparabilidad.

2.1 Las 3-gráficas de permutación cíclica

Una *permutación cíclica* es un órden cíclico del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Es decir, una clase de equivalencia $[\phi]$ del conjunto de biyecciones $\phi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ con respecto a la relación de equivalencia cíclica descrita al inicio de esta sección. Sea $[\phi]$ una permutación cíclica. Tres elementos $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$, con $i < j < k$, están en *el orden de las manecillas del reloj* con respecto a $[\phi]$, si existe $\psi \in [\phi]$, tal que $\psi^{-1}(i) < \psi^{-1}(j) < \psi^{-1}(k)$. En otro caso, decimos que los elementos i, j, k están *en contra de las manecillas del reloj* con respecto a $[\phi]$.

Definición 4 *Dada una permutación cíclica $[\phi]$, la 3-gráfica orientada $H_{[\phi]}$ asociada a la permutación cíclica $[\phi]$ es la 3-gráfica con $V(H_{[\phi]}) = \{1, 2, ..., n\}$ donde las aristas son ternas de la forma$\{i, j, k\}$ con $i < j < k$ que están en el orden de las manecillas del reloj con respecto a $[\phi]$, y con la orientación inducida por $[\phi]$.*

Por ejemplo, consideremos la permutación cíclica identidad, $(1\,2\,\ldots\,n)$, y su permutación cíclica reversa $(n\,\ldots\,2\,1)$. Entonces, las 3-gráficas asociadas son, respectivamente, el 3-torneo transitivo de n vérices, TT_n^3, y la 3-gráfica nula con n vértices.

No es difícil ver que una 3-gráfica orientada $H_{[\phi]}$ asociada a una permutación cíclica es transitiva, y por lo tanto su 3-gráfica subyacente es una 3-gráfica de comparabilidad.

2.2 Las 3-gráficas de intervalos en una circunferencia

Una gráfica simple G es una *gráfica de intervalos* si G es la gráfica de intersección de un conjunto de intervalos cerrados en la recta real. Tanto la familia de gráficas de intervalo, como la familia de complementos de gráficas de intervalo, son familias bien estudiadas de gráficas perfectas [9].

En analogía con estos conceptos, estudiaremos aquí la clase de 3-gráficas asociadas a un conjunto finito de intervalos cerrados en una circunferencia S^1.

Definición 5 *La 3-gráfica $H_{\mathcal{F}}$ asociada a una familia finita de intervalos cerrados en una circunferencia $\mathcal{F}$, es la 3-gráfica con $V(H_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$ cuyas aristas son las ternas de vértices con la propiedad de que sus intervalos correspondientes son disjuntos por parejas.*

Por ejemplo, si $\mathcal{F}$ es una familia de n intervalos cerrados disjuntos en S^1, entonces $H_{\mathcal{F}}$ es la 3-gráfica completa K_n^3.

No es difícil ver que toda 3-gráfica asociada a una familia finita de intervalos cerrados en una circunferencia, es una 3-gráfica de comparabilidad.

3 Resultados

Como mencionamos anteriormente, en este trabajo exhibimos tres comportamientos distintos, dentro de la familia de 3-gráficas de comparabilidad, con respecto a la relación entre el número cromático y el número de clan de estas hipergráficas.

Teorema 1 *Para cualesquiera enteros positivos w y k tales que $\lceil \frac{w}{2} \rceil \leq k$, existe una 3-gráfica de comparabilidad con número de clan w y número cromático al menos k.*

La prueba de este teorema es constructiva. La contrucción de las 3-gráficas de comparabilidad que satisfacen tener número de clan fijo y número cromático arbitrariamente grande se puede consultar en [7].

Teorema 2 *Sea H es una 3-gráfica de permutación cíclica. Entonces $\chi(H) \leq \omega(H) - 1$. Más aún, esta cota es justa.*

Teorema 3 *Si H una 3-gráficas de intervalos en una circunferencia, entonces $\chi(H) = \left\lceil \frac{\omega(H)}{2} \right\rceil$.*

Las pruebas de estos tres teoremas se pueden consultar en la versión larga de este artículo [4].

Referencias

[1] C. Berge. *Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind*, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur., Vol. 10, (1961).

[2] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas. *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics, Vol. 164 (1), 51–229, (2006).

[3] N. Garcia-Colin, A. Montejano, L. Montejano and D. Oliveros. *Transitive Oriented 3-Hypergraphs of Cyclic Orders*, Order, A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications, Vol.30 (13), 869–875, (2013).

[4] N. Garcia-Colin, A. Montejano, and D. Oliveros. *Exploring the concept of perfection in 3-hypergraphs*, Discrete Applied Mathematics, (to appear).

[5] P. Hansen, M. Las Vergnas. *On a property of hypergraphs with no cycle of length greater than two*, C Berge, D.K Ray-Chaudhuri (Eds.), Hypergraph Seminar, Springer, Berlin, 99–101 (1974).

[6] L. Lovász. *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, Discrete Mathematics, Vol. 2 (3), 253– 267, (1972).

[7] J. Luviano, A. Montejano, L. Montejano and D. Oliveros. *Mycielski Type Constructions for Hypergraphs Associated With Fractional Colorings* Bolletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. 20 (1), 1–16, (2014).

[8] A.Pnueli, A. Lempel and S. Even. *Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. 23, 160–175, (1971).

[9] J.L. Ramírez-Alfonsín and B.A. Reed. *Perfect Graphs*, Wiley Series in Discrete Mathematics & Optimization, Wiley, (2001).